TD n°3

La transformée de Fourier d'une fonction $f(t)$ est par définition :

$$TF[f(t)] = F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\exp(-i\,2\pi\,u\,t)\,dt$$

Rappeler l'expression de la transformée de Fourier inverse pour une fonction $f(t)$

Exercice n° 1

Soit l'expression $\exp(-i2\pi * u * t)$

1) calculer son module
2) Rappeler la condition d'existence de la transformée de Fourier
3) Ecrire la propriété de linéarité de la transformée de Fourier

Exercice n° 2

Soit les deux fonctions suivantes :

La fonction porte : $\Pi(t) = \begin{cases} 0 & si \quad |t| > a \\ 1 & si \quad |t| \le a \end{cases}$

La fonction porte dilatée et translatée : $\Pi\left(\dfrac{t - t_0}{T}\right)$

1) Représentez les fonctions ci-dessus
2) Calculez puis représentez la transformée de Fourier de ces deux fonctions
3) Calculer la transformée de Fourier inverse de la fonction sinus cardinal définie par $\sin c(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$. Conclure
4) Si $a \to 0$ que devienne la fonction porte et sa transformée de Fourier

Exercice n° 3

Soit la fonction triangulaire $\Lambda(t) = \begin{cases} 1 - |t| & si \quad -1 \le t \le 1 \\ 0 & \sin on \end{cases}$

1) Calculer la dériver de $\Lambda(t)$ et exprimer $\Lambda'(t)$ à l'aide de la fonction porte $\Pi(t)$
2) Appliquer à la relation obtenue la transformée de Fourier et déduire la transformée de Fourier de la fonction $\Lambda(t)$.
3) Vérifier que $\Lambda(t) = (\Pi * \Pi)(t)$ (produit de convolution). Retrouver le résultat précédent.

Exercice n° 4

Soit $f(t) = \exp\left(-\dfrac{|t|}{a}\right) \qquad \forall \qquad a > 0$

1) Calculer la transformée de Fourier de la fonction $f(t)$ avec $\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{\exp(ikt)}{1 + k^2}\,dk = \pi \exp(-|x|)$
2) Tracer la fonction $f(t)$ ainsi que sa fonction de Fourier pour différentes valeurs de $a \in \left\{1, 2, \dfrac{1}{2}\right\}$.
3) Calculer la transformée de Fourier de la fonction $g(t) = t * f(t)$