Licence MI

Maths Pour l'Info II

Traitement du signal

Plis fòs ba pengwen là !

Vincent Pagé vpage@univ-ag.fr Université Antilles Guyane

QUID ?

Traitement du signal : *Analyse et traitement d'enregistrements de phénomènes physiquement observables*

En fait 3 grandes parties :

- Analyse/Traitement de signaux (retrouver des choses dans un enregistrement/ corriger des signaux)
- Analyse de systèmes physiques (comprendre le fonctionnement d'un système)
- Correspondance Numérique Analogique (quels sont les liens entre les deux, quelles sont les pertes lors d'un échantillonage)

Plan du cours

Dans ce cours :

- Analyse / Traitement des Signaux et Correspondance Numérique-Analogique
- Vu sous l'angle des « fréquences »

Traitement du signal : 12h Cours / 18h TD / 20h TP

- Transformée de Fourier (Analyse)
- Filtrage Linéaire (Traitement)
- Echantillonage

Traitement du signal

Remarques préliminaires

Historique : Depuis 1940 (a peu près) : Guerre !

- Electronique / Optique / Mécanique ... tous ont eu a analyser des signaux issus d'expériences.
- Union / Généralisation de ces techniques : Traitement du signal.
- S'intéresse aux signaux indépendamment de leur origine physique.
- But : Trouver des techniques mathématiques
  - de descriptions, d'analyse et de de traitement de ces signaux.

Traitement du signal

Remarques préliminaires

De façon générale, le traitement du signal suit le modèle suivant :

Signal d'entrée *e* → Traitement *h* → Signal de sortie **s** → Classifieur *c* → Décision **d**

On peut ne s'intéresser qu'à une partie parmi ces deux

Objectif : *construire les « bons »* ***h*** *et/ou* ***c***

Traitement du signal

Exemples d'applications :

Image Floue -> Image Nette (la plus nette possible)

Traitement

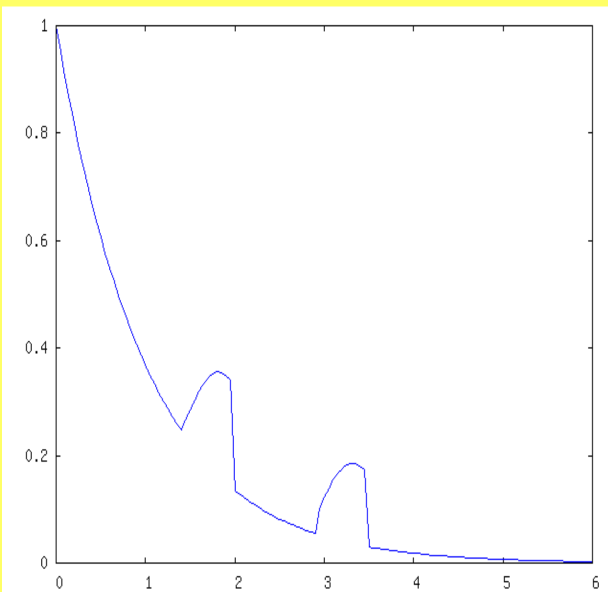
h

- Automatiquement !
- Avec le minimum d'informations possible !

Traitement du signal

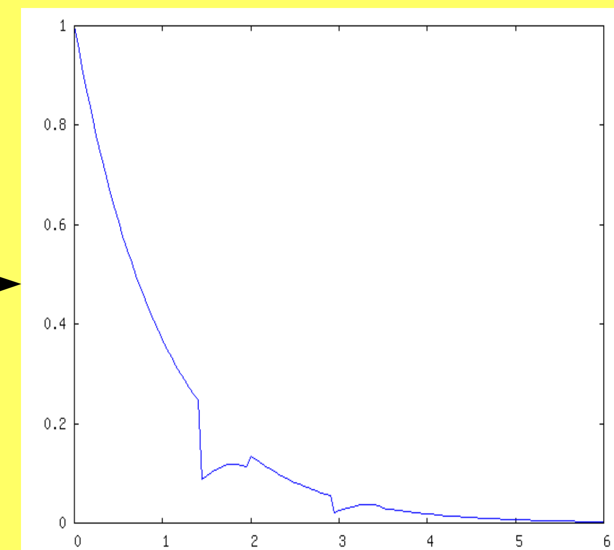
Exemples d'applications :

Equaliseur de chaine hifi : Atténuation de certaines fréquences.



Traitement

h



Ici, les fréquences atténuées sont divisées par 3 OU 5

Traitement du signal

Exemples d'applications :

Localisation d'un signal dans un signal bruité.

ILLUSTRER !

Dans ce cours, sauf avis contraire, décision = seuillage

Traitement du signal

Exemples d'applications :

Compression d'un signal (d'une image)

ILLUSTRER !

Exemples d'applications :

Les précédentes applications seront abordées durant ce cours. Celle ci non !

Classification automatique d'espèces arboricoles (Grandchamp / Abadi)

ILLUSTRER

Une recherche intéressante !

Méthodologie

Pour résoudre les problèmes qui se posent :

- On modélise le problème sous une forme mathématique puis on utilise les outils mathématiques disponibles...

exemple : le signal est une fonction... les changements brusques de mon signal sont localisés aux points ou sa dérivee est élevée .

- On regarde ce qu'il est possible de faire avec un formalisme ...

exemple : Si on dit que la valeur de chaque pixel d'une image est le resultat d'un tirage de Variable Aléatoire, peut on avoir des résultats interessants ?

Bonne maitrise des OUTILS mathématiques

Traitement du signal

Classement des signaux

Classement dimensionnel :

- Par nombre de variables
  - f(t) : signal monodimensionnel (courant électrique)
  - g(x,y) : signal bidimensionnel (Image noir et blanc)
  - h(x,y,t) : signal tri-dimensionnel (film en noir et blanc)
- Par taille de l'espace des valeurs :
  - Inb(x,y) = ng; Valeurs dans N
  - Ic(x,y) = [R,G,B]; Valeurs dans N^3

Classement d'intérêt réduit. Techniques mathématiques identiques.

Classement des signaux

Classement morphologique :

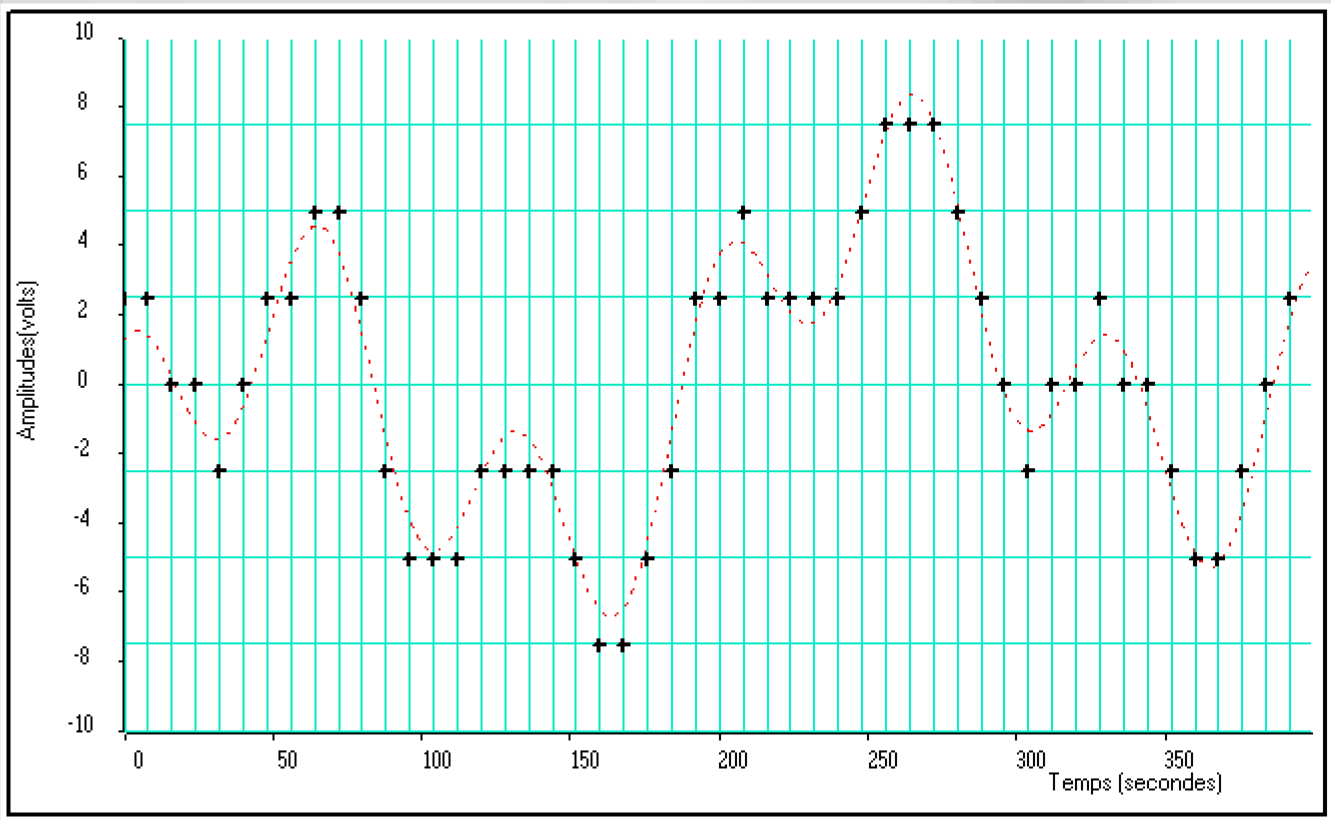
• ***Analogique***	: Support continu /	Espace de valeurs continu
• ***Quantifié***	: Support continu /	Espace de valeurs discret
• ***Echantillonné***	: Support discret /	Espace de valeurs continu
• ***Numérique***	: Support discret /	Espace de valeurs discret

Pour nous : signaux analogiques et numériques.

Traitement du signal

Classement des signaux

En rouge, signal analogique, en noir, signal numérique



Traitement du signal

Représentation d'un signal

- Numérique : Suite de chiffres f(t)=F=[f1,f2.........,fn]

- Analogique : fonction du temps f(t)

Traitement du signal

Echantillonage

Passer d'un signal analogique à un signal échantilloné :

- On ne conserve qu'une valeur tous les Te secondes.
- fréquence d'échantillonage (fe = 1/Te) : nombre d'echantillons / s
- Sur une durée D, on obtient N = fe.D échantillons
- Plus tard, nous trouverons une forme mathématique pour exprimer l'opération d'échantillonage...

Energie d'un signal

- Quantité de travail nécessaire pour créer le signal.

Analogique : $$|f|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt$$

Numérique : $$|f|^2 = \sum_{i=1}^{N} |f_i|^2$$

Traitement du signal

Représentation d'un signal numérique

- vecteur f=[f1,f2..........,fn]

- Dans une base : $$f = \sum_{i=1}^{N} f_i \vec{e}_i$$

Les fi représentent la « quantité « de signal présente à l'instant i.

- Présenter le Dirac....

Traitement du signal

Introduction à la notion de fréquences

- Ce qu'on sait sur les fréquences :
  - en Hz (1/s)
  - Hautes / Basses fréquences.
  - On peut les filtrer (équaliseur).

Personne (de normal) ne sait définir une fréquence...

Traitement du signal

Espace de Fourier

Sans détailler l'aspect mathématique, on peut écrire :

$$\exists F(\nu) / \forall t,\ f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu)\, e^{i2\pi\nu t}\, d\nu$$

Interprétation:

=> Les exponentielles complexes sont une base des signaux.

=> Chaque signal peut être vu comme une somme de sinusoides de fréquences différentes.

=> F(ν) représente la quantité de chaque fréquence présente dans le signal. On l'appelle transformée de Fourier de f, notée TF(f).

Traitement du signal

Espace de Fourier

Pour obtenir la TF d'un signal f :

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i2\pi\nu t}\, dt$$

Remarques :

- F(ν) est la représentation de f dans l'espace de Fourier : même info.
- F(ν) ne dépend pas du temps.
- F(ν) est aussi un signal.
- F(ν) est à valeurs dans C...

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu)\, e^{i2\pi\nu t}\, d\nu$$

Traitement du signal

Espace de Fourier

On peut écrire :

$$F(\nu)=|F(\nu)|.e^{i\theta(\nu)}$$

Remarques : Identique recette de cuisine

- Module (Spectre de la TF) : quantité de la sinusoïde de fréquence nu.
- Phase : a quel moment incorporer cette sinusoïde.
- Avec les deux, on re-crée f(t).
- Phase difficile à interpréter.
- Importance relative dépend du signal.

Traitement du signal

Parseval

On a : $$\left|F\right|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left|F(\nu)\right|^2 d\nu = \left|f\right|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left|f(t)\right|^2 dt$$

F et f représentent le même signal : Leur énergie est égale.

Transformée de Fourier Discrète

Un signal de N échantillons a une TFD de N échantillons.

TFD et TFD inverse :

$$F_m = \sum_{n=0}^{N-1} f_n \exp^{-i2\pi nm/N} \qquad f_n = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} F_m \exp^{i2\pi nm/N}$$

Parseval :

$$\sum_{n=0}^{N-1} |f_n|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |F_m|^2$$

Transformée de Fourier Discrète

Dans l'équation de TFD,

- la variable n (l'indice de l'échantillon) joue le rôle de temps.
- la variable m/N joue le rôle de fréquence.
- m allant de 0 a N-1, les fréquences vont de 0 a 1...

En l'absence de temps "réel", on parle de fréquences normalisées...

En fait, pour des raisons qu'on verra plus loin, ces fréquences sont représentées sous la forme :

- m variant de 0 a N/2 : fréquences positives
- de N/2 a N-1 : fréquences négatives.

Traitement du signal

Espace de Fourier

TF d'un signal 2d (image analogique) :

$$F(\mu,\nu)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,e^{-i2\pi\mu x}\,e^{-i2\pi\nu y}\,dx\,dy$$

TF inverse d'un signal 2d

$$f(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(\mu,\nu)\,e^{i2\pi\mu x}\,e^{i2\pi\nu y}\,d\mu\,d\nu$$

Quelques TF célèbres

Exercices et propriétés : Vues en TD

Trouver la TF de :

- $f(t)=1\ si\ t\in\left[-1/2,1/2\right]$
  $f(t)=0\ sinon$
- $f(t)=\delta(t)$
- $f(t-t0)$
- $f(at)$
- $e^{i2\pi\nu_0 t}f(t)$

Traitement du signal

Propriétés de la TF

Symétrie hermitienne des signaux réels.

Retournement temporel

Involution.

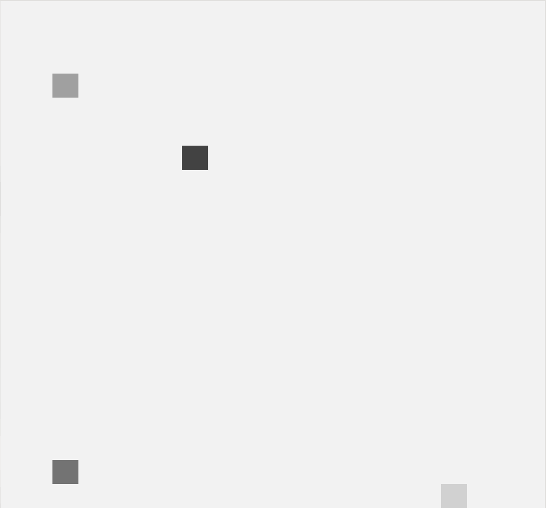
Dérivée

....

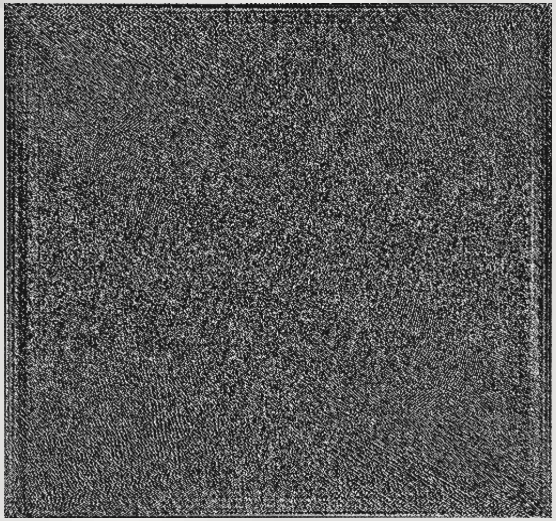
Exemple de TF

Image de départ → Plan de Fourier

Module

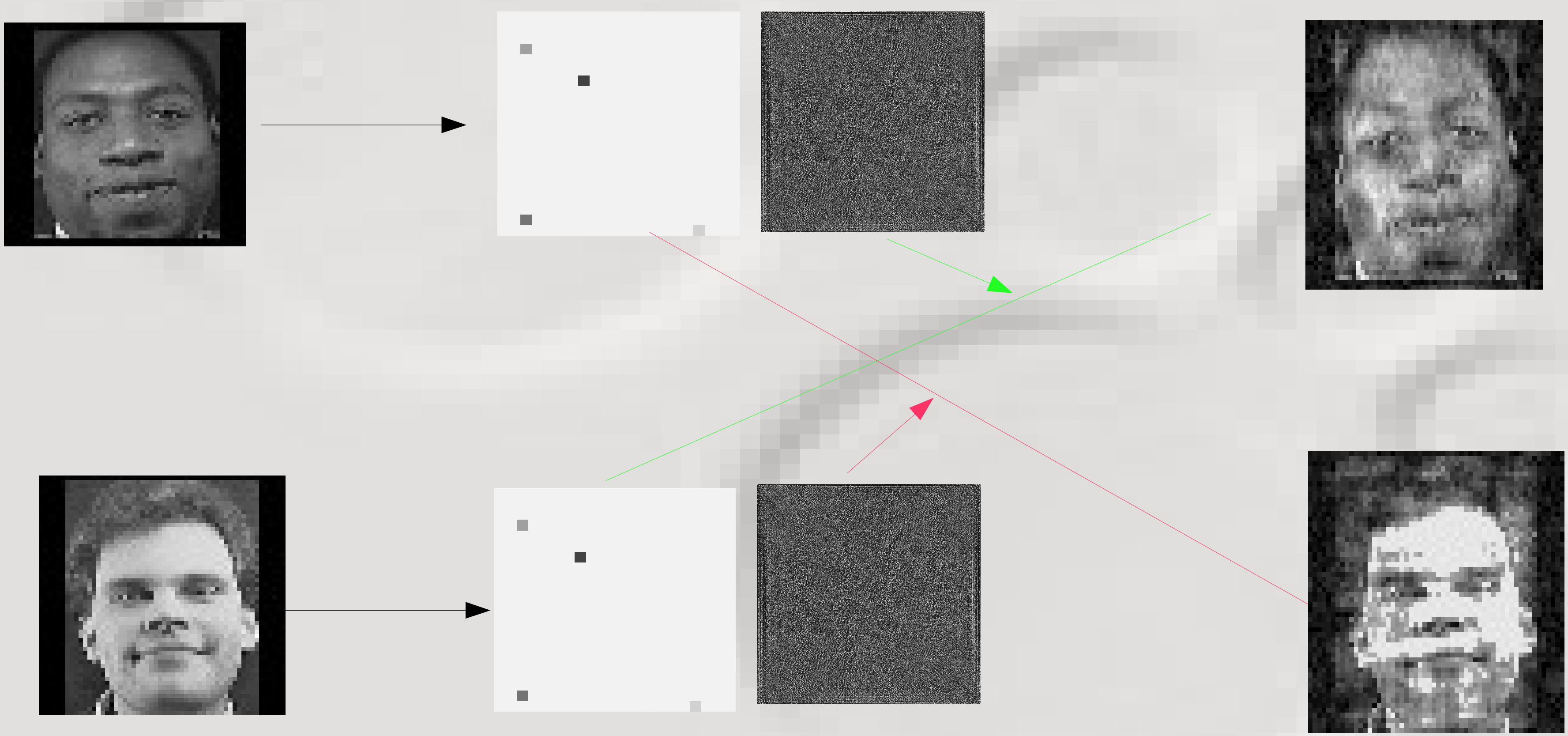


Phase



Importances respectives du module et de la phase de la TF

Attention, Ceci ne vaut que pour des images !



Traitement du signal

Filtrage linéaire : principe

Opération de filtrage de fréquence :

Multiplication point à point dans l'espace de Fourier :

C'est ce qui est fait par un equaliseur de chaine Hi-Fi. Chaque fréquence se voit atténuée ou amplifiée par un multiplicateur. Dans le cas général, ce multiplicateur est complexe (dans C)

On a alors l'équation suivante dans le domaine de Fourier :

F est la TF du signal en entrée, H est la **réponse en fréquence** du filtre, S est la TF du signal en sortie.

$$\hat{S}(\nu)=\hat{H}(\nu).\hat{F}(\nu)$$

Filtrage linéaire : principe

Dans l'espace temporel, pour cette opération, le signal en sortie est obtenu par :

$$s(t) = TF^{-1}[\hat{S}(\nu)]$$

Soit, en déroulant quelques calculs (démo au tableau) :

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t_0)\, h(t - t_0)\, dt_0$$

Avec h : réponse impulsionnelle du filtre :

$$h(t) = TF^{-1}[\hat{H}(\nu)]$$

Traitement du signal

Convolutions célèbres

- Convolution par un dirac.
- Auto convolution d'une porte
- Auto corrélation.

Traitement du signal

Filtrage des signaux numériques

Convolution :

$$s_n = h * e = \sum_{k=0}^{N-1} h_k e_{n-k}$$

Convolution et TFD :

$$s = h * e \rightarrow S_k = H_k . E_k$$

Traitement du signal

Exemple de filtrage passe haut

TF * = TFI

Traitement du signal

Exemple de filtrage passe bas

TF * [ ] = TFI

Traitement du signal

Echantillonage

Shannon

Traitement du signal

Déconvolution : Principe

Un signal a subi un filtrage accidentel avant d'être observé.

On désire retrouver le signal original.

$$S \text{ et } h \xrightarrow{s=h*o} S(\nu)=H(\nu).O(\nu)$$

$$o \longleftarrow O(\nu)=S(\nu)/H(\nu)$$

Traitement du signal

Exemple de déconvolution

Le flou de bougé

Traitement du signal

Exemple de déconvolution

Le flou de défocalisation

Traitement du signal

Compression avec pertes à l'aide de la TF

On ne conserve que certaines fréquences.

Traitement du signal
et
Théorie de l'information

Codage jpeg.

1. Compression avec pertes :
   - Transformee en cosinus (semblable TF).
2. Réorganisation des informations
3. Codage entropique.