Licence Info

Maths pour l'info 1

Outils mathématiques

(des maths utiles, sans forcément en comprendre les raffinements...)

12h / 20h / 22h

Vincent Pagé vpage@univ-ag.fr Université Antilles Guyane

Plan du cours

- Vecteurs, Matrices et calcul matriciel appliqué
- Probabilités
- Logique

Dans le cours : des maths simplifiées et des exemples directs.

Dans les TD : de belles applications de ces maths.

Dans les TP : de la pratique.

Vecteurs

- Qu'est ce qu'un vecteur ?

  Vecteur dans R^n : un tableau de n réels.

  X = [x1,....xn] ;

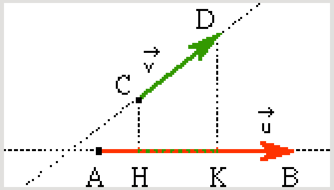
  Caractérise un objet.

  Ex : *Position d'un point en 2D, 3D. Notes d'un étudiant dans différentes matières. Notes des étudiants a un examen d'une matiere...*

  Si c'est un espace vectoriel, on peut :

- Additionner les vecteurs : formule
- Les multiplier par un scalaire : formule
- Calculer leur produit scalaire : transparent suivant.

Produit scalaire



- Qu'est ce que c'est :
  Un nombre, dépendant de la projection de u sur v;
  (u,v) = |AB|. |HK| = |AB|. |CD| cos (theta)

  Dans le cas d'une base orthonormee (?), cela se calcule comme suit :

  Pratique pour :
- Définir une distance euclidienne (sqrt(u,u))
- Orthogonalité, colinearité.

Applications

• La translation dans un plan comme une addition de vecteurs
• La rotation dans un plan : une addition de vecteurs ?

• Un calcul de moyenne comme produit scalaire
• Un calcul de moyenne ponderee comme produit scalaire.

Exemple : Dans une entreprise d'informatique, par mois, un ingenieur coute 3000 euros, un commercial coute 2000 euros et un technicien 1500 euros.

Combien coute l'ensemble du personnel (10 techniciens, 3 ingenieurs, 5 commerciaux) → produit scalaire !

Matrices

Pour nous : Un tableau de taille m,n → m*n coefficients, souvent réels.
Permet de stocker des informations (image, tableau 2d)

Mais surtout intéressant en tant qu'opérateur sur les vecteurs.
Représente un système (linéaire) agissant sur un vecteur d'entrée pour donner un vecteur de sortie.

Multiplication d'un vecteur par une matrice : formule

- Autant de colonnes que le vecteur d'entree.
- Autant de lignes que le vecteur de sortie

•Matrice identité.

Matrices

Exemples :

- Rotation 2D. Rotation 3D autour de l'axe Z.
 (ici, l'ensemble d'arrivée et de départ sont les mêmes)

- Que représente la matrice [2 0 ; 0 1] ?

- Calcul de notes d'EC a partir du vecteur de notes complets d'un étudiant.

- Mise en forme d'un système linéaire : Y= AX (voir plus loin)

Opérations matricielles

Si l'on considère une matrice comme un opérateur, on peut composer ces opérateurs...

Y1 = AX

Y2 = BY1

→ Y2 = B*(AX)

Il existe une matrice M telle que Y2 = MX.

M= B*A. (Attention, different de A*B)

Et la formule générale : formule.

Addition de matrices : formule.

Multiplication par un scalaire : formule

Exemple : rotation et etirement.

Systèmes linéaires

Exemple :

On tient une entreprise d'informatique qui fait du développement de logiciels et de la maintenance. Pour les produits de développement, on utilise 3 ingenieurs, 2 commerciaux et 5 techniciens. Pour la maintenance, 1 ingenieur et 3 techniciens.

Montrer que l'on peut calculer le nombre de personnes nécessaires lorsque l'entreprise tourne avec 5 logiciels en développement et 4 projets de maintenance sous forme de produit matrice / vecteur.

Ingenieurs= 3*P1 + 1*P2
Commerciaux = 2*P1
Techniciens = 5*P1 + 3*P2;

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Systèmes linéaires résolution

Sur l'exemple :
Que puis je faire avec 5 ingénieurs, 2 commerciaux et 10 techniciens ?

Plus formellement, Y = AX.
Pour Y0 donné, existe-t-il X0 tel que Y0 = AX0 ?

Tout dépend : y est de dimension n, X de dimensions P.
On a donc un systeme de n equations pour p inconnues.

- si n<p : sous contraint (infinite de solution)
- si n>p : sauf cas particulier, sur contraint (aucune solution)
- si n= p : saufs cas particuliers, une solution unique

Matrices carrées

Si n=p, la matrice A est carrée.

Eventuellement elle a un inverse : A-1 tq A* A-1 = Id et A-1 * A = Id.
Si on doit resoudre un systeme lineaire a n equations, n inconnues
Et A inversible, alors :
AX = B => A-1 * A * X = A-1 * B
=> Id*X = A-1 * B
=> X = A-1 * B (problème réglé).

A inversible <=> det(A) != 0 : determinant de A.

Calcul du determinant de A … 2D : 3D et plus : cofacteurs.
Calcul de la matrice inverse... cas diagonal : facile, sinon, pas facile.

Vecteurs Propres

Soit x un vecteur non nul.
Si A.x = lx   avec l un reel, on dit que x est un vecteur propre de A.
On dit que l est valeur propre de A.

Quels sont les valeurs propres / vecteurs propres de
[3 0]
[0 2]

l valeurs propres de A <=> l solution de det (A-l.Id) = 0
C'est le **polynôme caractéristique** de A
(démo : Ax = lx <=> (A-l.Id).x = 0 avec x non nul => A-l.Id non inversible.)

Trouver les vecteurs propres associes a l : resoudre le systeme (A-l.Id)x = 0

Changement de base

On a vu que chaque colonne d'une matrice correspond à l'image du vecteur de base par le système que constitue la matrice.

Prenons une nouvelle base B1:(i1, j1) tq i1 = i+j et j1 = j.
Quelles sont les coordonnees d'un vecteur x1 dans B1, exprimées dans la base B ? x = P.x1
Avec P = [1, 0]
[1, 1]
P est inversible (si B1 est bien une base). (demo facile)

Soit A la matrice d'une application lineaire dans la base B. Quelle est la matrice de cette application linéaire dans B1 ?
A1 = invP A P
Le déterminant est invariant par changement de base.

Diagonalisation

Quel est l'inverse d'une matrice diagonale ?
Quelle est la nieme puissance d'une matrice diagonale ?
=> Les matrices diagonales, c'est bien !

Réunissons les deux dernieres notions vues :
Quelle est l'expression d'une matrice A dans la base de ses vecteurs propres ?
Quelle est l'expression de A^n si A est diagonalisable ?

Attention : ceci n'est pas toujours possible.
Exemples :
- Rotation 2D : aucune valeur propre dans R.
- [1 2] valeurs propres : -1 (double)
  [-2 -3] mais dim E_1 = 1 : vecteurs propres : [1 1]

Diagonalisation 2

Quand une matrice est elle diagonalisable ?

Quand ses vecteurs propres forment une base.

Dans la pratique :
- on calcule les valeurs propres.
- on calcule les vecteurs propres
- on verifie que la matrice dont les colonnes sont les vecteurs propres est inversible.

Dit autrement : quand l'espace propre de chaque valeur propre est de la meme dimension que la multiplicité de la valeur propre considérée.

Probabilités

Intérêt : modéliser notre manque de connaissance et travailler avec...

On utilise des Variables Aléatoires (VA) qui représentent une mesure dont la valeur change en fonction des réalisations.

Exemple :
- valeur du tirage d'un dé a six faces (X => x=1, x=2.... x=6)

Ces VA peuvent être :
- discrètes (dé a 6 faces)
- qualitatives (match de foot : 1 N 2) : on se ramène au cas discret...
- continues (taille d'un individu pris au hasard dans la rue)

Loi de Probabilités

Dire qu'une mesure est gouvernée par le hasard ne veut pas dire qu'elle fait n'importe quoi ! Elle est régie par des lois :

Pour une VA discrete, on utilise P(X=x) : probabilité que la VA prenne la valeur x.

Ex 1 : jet de dé a 6 faces : P(X=1) = 1/6 P(X=2) = 1/6 .....
Ici, on parle de loi uniforme : toutes les valeurs sont équiprobables.

Ex 2 : X : résultat d'un match OM-PSG au vélodrome :
P(X=1) = 0.5 P(X=N) = 0.4 P(X=2) = 0.1   (valeurs scientifiquement démontrées par discussions d'experts au « bar de l'OM »)

Propriétés :

$$\forall x_i, P(x_i) \in [0,1]$$

$$\sum_{i=1}^{n} P(X=x_i) = 1$$

Densité de Probabilités

Pour une VA continue réelle,
on utilise p(X=x) : densité de probabilité que la VA prenne la valeur x.

Exemple loi normale : $$P(X=x)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi\sigma^2)}}e^{\frac{-(x-m)^2}{(2\sigma^2)}}$$

Remarques :
- la proba que X prenne la valeur x est NULLE pour une VA continue.
- la proba que X prenne une valeur comprise entre x1 et x2 vaut

$$P(x\in[x_{1,}x_2])=\int_a^b P(X=x)\,dx$$

Propriétés : $$\forall x_i, P(x_i)\geq 0$$
$$\int_{i=-\infty}^{\infty} P(X=x)\,dx=1$$

Pratique

Dans ce cours, nous ne ferons pas de différence majeure entre une proba et une densité de proba. Simplement, nous sommerons les proba et intègrerons les ddp.

Il sera pratique de considérer que p(X=x) représente « la proba qu'un évènement prenne la valeur x ». C'est faux, mais conforme a l'intuition et cela raccourcit énormément les phrases.

Exemple : gaussienne.

Par ailleurs, nous ne noterons plus p(X=x) mais p_X(x) voir souvent P(x) (Notation ingénieur, pas mathématique pour deux sous)...

Estimations de lois de probas

Entre autres, on peut considérer qu'on peut estimer ces lois à partir d'exemples, considérant que la fréquence avec laquelle x se réalise tends vers P(X=x) quand le nombre d'exemples tends vers l'infini.

Exemple : je classe mes étudiants en deux catégories :
motives (M) / fainéants (F).

Voici 10 exemples que j'ai noté cette année : F,M,F,M,F,F,F,M,F,F

Quelle est la probabilité estimée qu'un étudiant pris au hasard soit motivé ?
Notez que cette probabilité n'est pas la vraie : en prenant un autre echantillon, on aurait un autre résultat. Quand n tends vers l'infini, les proba estimees tendent vers les vraies.

Espérances

On appelle Espérance de X la quantité :

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i\, p(x_i) \qquad E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\, p(x)\, dx$$

Cette quantité représente la valeur moyenne obtenue par X.

On peut aussi calculer l'espérance d'une fonction de X :

$$E(f(X))=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, p(x_i) \qquad E(f(X))=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, p(x)\, dx$$

Applications :

1. Trouvez la valeur moyenne obtenue par un tirage de dés a 6 faces.

Remarque : la moyenne n'est pas forcément une valeur possible de la VA.

2. Voici un jeu : on prends un étudiant au hasard. Je vous donne 100 euros si c'est un étudiant Motivé, vous me donnez 50 euros s'il est Fainéant. Vous jouez ?

Remarque : ceci est l'espérance de gain : très important !

Loi conjointe

Soit deux VA, X et Y
exemples :
- sexe et motivation d'un individu (homme/femme et motivé/fainéant)
- poids et taille d'un individu pris au hasard)

p(X=x,Y=y) est la proba (ici ddp) que X prenne la valeur x et Y prenne la valeur y.
Notée dans ce cours p(x,y)

Propriétés (lois marginales)

VA discrètes :
$$p(x)=\sum_{i=1}^{n_y} p(x, y_i)$$
$$p(y)=\sum_{i=1}^{n_x} p(x_i, y)$$

VA continues
$$p(x)=\int_{-\infty}^{\infty} p(x, y)\,dy$$
$$p(y)=\int_{-\infty}^{\infty} p(x, y)\,dx$$

X et Y indépendantes
<=>
P(x,y) = p(x)*p(y)

Estimations de lois conjointes

Je reclasse mes étudiants en motivés/fainéants mais cette fois ci en fonction de leur sexe. Voici mes exemples :

(H,F),(H,F),(H,F),(H,M),(H,M),(H,F),(H,F),(H,M),(H,F),(H,F),(H,M)

Femmes : (F,F),(F,M,(F,M),(F,F)

- Estimez les différentes probabilité p(sexe, travail)
- Trouvez a partir des exemples les différents p(sexe), p(travail)
- vérifiez les propriétés sur les lois marginales.

Probabilités conditionnelles

Soit deux VA, X et Y
exemples :
- sexe et motivation d'un individu (homme/femme et motivé/fainéant)
- poids et taille d'un individu pris au hasard)

p(X=x/Y=y) est la proba (ici ddp) que X prenne la valeur x sachant que Y a pris la valeur y. Notée dans ce cours p(x/y)

Propriétés

Loi de Bayes :

$$p(x/y)=p(x,y)/p(y)$$
$$p(y/x)=p(x,y)/p(x)$$

Autres prop :

$$\sum_{i=1}^{n} p(x_i/y_j)=1 \qquad \sum_{i=1}^{n} p(x_j/y_i)=RIEN\ DE\ BON$$
$$\int_{i=1}^{n} p(x/y)\,dx=1 \qquad \int_{i=1}^{n} p(x/y)\,dy=RIEN\ DE\ BON$$

Estimations de lois conditionnelles

Je continue avec mes étudiants en motivés/fainéants en fonction de leur sexe.
Re-voici mes exemples :
(H,F),(H,F),(H,F),(H,M),(H,M),(H,F),(H,F),(H,M),(H,F),(H,F),(H,M)
Femmes : (F,F),(F,M,(F,M),(F,F)

- Trouvez la proba qu'une femme soit Fainéante, qu'un homme soit fainéant.
- Trouvez la proba qu'une femme soit Motivée, qu'un homme soit Motivé

- Si j'ai un individu Motivé, quelle est la proba que ce soit un homme / une femme ?
- Si j'ai un individu fainéant, quelle est la proba que ce soit un homme / une femme ?

=> Tres pratique pour prendre des décisions...