Université des Antilles et de la Guyane Vincent Pagé

UEP15 : MATHS POUR L'INFO I
Licence STS -Troisième année

Travaux Dirigés

Feuille 1

Tous les exercices d'une feuille devront impérativement être résolus et maîtrisés pour le TD suivant.

Exercice 1 : Systèmes Linéaires 1

Dans une usine agroalimentaire, on utilise trois céréales C_1, C_2 et C_3 pour fabriquer trois farines F_1, F_2 et F_3.
Pour faire 100 kg de F1, il faut 100 kg de C1, 50 kg de C2 et 50 kg de C3
Pour faire 100 kg de F2, il faut 80 kg de C1, 70 kg de C2 et 50 kg de C3
Pour faire 100 kg de F3, il faut 40 kg de C1, 120 kg de C2 et 40 kg de C3

1) Quelles quantités respectives de céréales seront nécessaires pour fabriquer 2000kg de farine F_1, 500 kg de F_2 et 800 kg de F_3.
2) Comment poser le problème pour savoir quelles quantités respectives, exprimées en tonnes, de farine F_1, F_2 et F_3 pourra-t-on fabriquer en utilisant complètement 345 tonnes de C_1, 102,5 de C_2 et 102,5 de C_3 ? (solution pas aujourd'hui !)

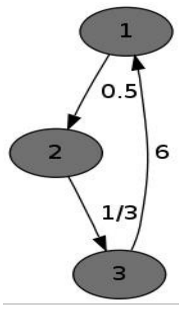
Exercice 2 : Matrice de transition d'évolution.

Une certaine espèce de coléoptères se comporte de la manière suivante :
En moyenne, la moitié des coléoptères meurent la première année, les autres survivent la deuxième année. Parmi ces derniers, les deux tiers meurent durant cette seconde année et les autres survivent une troisième année. À la fin de cette troisième année, ils meurent tous, mais auparavant chacun d'eux donne naissance en moyenne à six coléoptères.

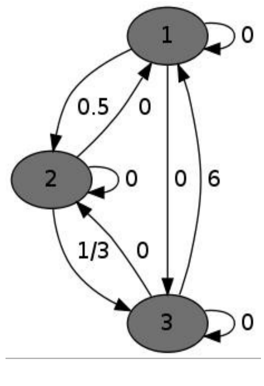
1) Comment calculer le nombre de coléoptères dans leur première année en fonction de la répartition précédente ? Même chose pour le nombre de coléoptères dans leur 2ème année et 3eme année ?
2) Comment exprimer directement tous ces nombres par calcul matriciel ?
   Attention, par convention, on utilisera plutôt un calcul de la forme x* A que B*x...
3) Partant d'une population de 9000 coléoptères, 3000 dans chaque tranche d'âge, donnez la composition de la population au bout de : un an ; deux ans ; trois ans, 100 ans ?
4) On recherche s'il existe une répartition de population invariante d'une époque à la suivante. Quel système d'équations faut-il résoudre ?

De façon générale, cette utilisation des matrice prends le nom de matrice de transition : Un système est caractérisé par n états. La matrice caractérise la proportion de chaque état i passant a l'état j. Aij est la proportion d'élements de l'etat i passant à l'etat i. Le vecteur d'entrée est alors la répartition des états avant la transition, le vecteur de sortie est la répartion des états après la transition.
MAIS : P1 = P0*A …. (pas P1=A*P0)
Ceci est très utile en dynamique des populations.

On représente souvent ces transitions sous forme de graphe :

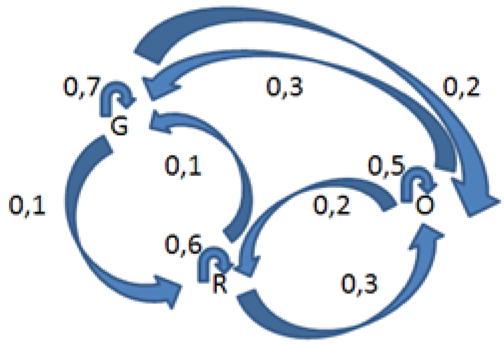


Ou encore :



Application 1 : On suppose que d'une année sur l'autre, 60 % des célibataires se mettent en couple, et que 20% des couples redeviennent célibataires. Sur l'ile de la tentation version maths pour l'info, on laisse 100 individus, pendant 3 ans. Au départ, 50 sont célibataires, et 50 sont en couple (25 couples). Quelle est la répartition finale ?

Application 2 : un panel de consommateurs est partagé en trois catégories en fonction d'une appétence pour un produit. On trouve de gros consommateurs (G), des occasionnels (O) et des réfractaires (R). Un an plus tard, on mesure leur probabilité d'appartenir à telle catégorie en fonction de leur profil en début de période. On obtient ce graphe, avec sa matrice de transition :



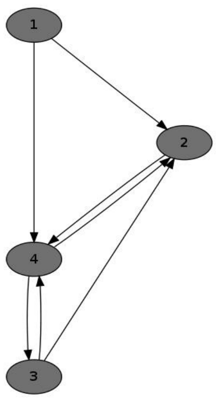
G	0,7	0,2	0,1
O	0,3	0,5	0,2
R	0,1	0,3	0,6

En regardant l'évolution de cette matrice, on peut ainsi prédire si comment le produit va s'installer au sein de la population.

Exercice 3 : Graphes

Comment stocker un graphe en utilisant des matrices ? (vu en cours de graphes).

Quelle est la matrice associée au graphe suivant ?



Si A est la matrice du graphe, que représente A*x,

avec X un vecteur de base ?

Montrer pour l'exemple proposé la propriété suivante pour n = 2 :

Le terme $m_{i,j}$ (situé à la $i^{ème}$ ligne et la $j^{ème}$ colonne) de A^n est égal au nombre de chaînes **de longueur *n*** reliant A_i à A_j.

Application : le graphe précédent représente différents parcours de jogging possibles entre 4 points. Chaque arête mesure 500m. Combien de parcours différents de 1500m puis je trouver pour démarrer chez moi (en 1) et finir au bar de la plage (en 4) ?