Récurer du sol au plafond

Exercices simples :

1) En reprenant l'arithmétique de Peano, programmez (quo x y) et (mod x y) qui retournent respectivement le quotient et le modulo de x par y. Vous pourrez vous servir de toute fonction auxiliaire que vous jugerez utile.

(quo 14 3) -> 4 (mod 14 3) -> 2

2) Ecrire la fonction ($expt a b) de maniére itérative et par dichotomie, avec un define interne.
3) Ecrire une fonction itérative (ppdiv n) prenant un entier n >= 2 et retournant le plus petit diviseur de n dans [2, n]. Ce plus petit diviseur est aussi le plus petit facteur premier de n.
4) En déduire un prédicat (premier? n) testant si n est premier avec un coût en $O(\sqrt{n})$.
5) Programmez la fonction (exptmod a b n) retournant a^b modulo n. Elle doit être très efficace ! Vous devrez à la fois réduire la taille des calculs intermédiaires [donc en évitant de payer l'arithmétique des grands nombres] et par dichotomie sur b.

(exptmod 12345678 456789 654) -> 522 ; 12345678^{456789} [654], ouf !

6) Ecrire la fonction (pgcd x y) retournant le plus grand commun diviseur de x et y. On se sert du fait que le pgcd(x,y) = pgcd(y, x%y)

On dit que n passe le test de Fermat en base a si $a^{n+1} = 1$ [n]. Le test de Fermat pour savoir si n est [presque certainement] premier, consiste à faire plusieurs fois l'expérience suivante : on tire au hasard une base a dans [2, n-1] première avec n et on regarde si n passe le test en base a. S'il ne le passe pas, il est composé, sinon il y a de grandes chances qu'il soit premier. Nous nous contenterons des bases a=2, a=3 et d'une base aléatoire dans [2, n-1] première avec n.

7) Ecrire une fonction (random-base n) retournant un nombre aléatoire de [2, n-1] qui soit premier avec n. (random-base 10) -> 3, 7 ou 9
8) En déduire un prédicat (fermat-premier ? n) retournant #t si n est premier suivant le test de Fermat en 3 passes décrit ci-dessus.

Exercices difficiles :

1) Trouvez le plus petit nombre premier ayant au moins 30 chiffres.
2) Implémenter la fonction (ithprime k) retournant le k-ième nombre premier (celle de Maple).

On construit une pyramide de billes de telle sorte que le triangle équilatéral situé à la base comporte N billes par côté.

3) Ecrire une fonction récursive profonde (pyramide N) retournant le nombre total de billes de la pyramide. (pyramide 3) -> 10