Cours IUP – PI2E
Maths Pour l'Info
Année 2003-2004

# Traitement du signal

Plis fòs ba pengwen là !

Vincent Pagé vpage@univ-ag.fr Université Antilles Guyane

# QUID ?

- Traitement du signal :
  - Analyse et traitement d'enregistrements de phénomènes physiquement observables

Intérêt :

- Traitement de signaux / d'images
- Détection d'anomalies...
- Analyse de signaux.

# Plan du cours

- Traitement du signal : 8h de cours / 4h TP
  - Transformée de Fourier.
  - Filtrage Linéaire.

# Traitement du signal

## Remarques préliminaires

Historique :

- Electronique / Optique / Mécanique ... tous ont eu a analyser des signaux issus d'expériences.
- Union / Généralisation de ces techniques : Traitement du signal.
- S'intéresse aux signaux indépendamment de leur origine physique.
- But : Trouver des techniques mathématiques de descriptions de signaux généralistes.

## Classement des signaux

### Classement dimensionnel :

- Par nombre de variables
  - f(t) : signal monodimensionnel (courant électrique)
  - g(x,y) : signal bidimensionnel (Image noir et blanc)
  - h(x,y,t) : signal tri-dimensionnel (film en noir et blanc)
- Par taille de l'espace des valeurs :
  - Inb(x,y) = ng; Valeurs dans N
  - Ic(x,y) = [R,G,B]; Valeurs dans $N^3$

Classement d'intérêt réduit. Techniques mathématiques identiques.

# Traitement du signal

## Classement des signaux

### Classement morphologique :

- ***Analogique*** : Support continu / Espace de valeurs continu
- ***Quantifié*** : Support continu / Espace de valeurs discret
- ***Echantillonné*** : Support discret / Espace de valeurs continu
- ***Numérique*** : Support discret / Espace de valeurs discret

Pour nous : signaux analogiques et numériques.

# Traitement du signal

## Représentation d'un signal

- Numérique : Suite de chiffres  f(t)=F=[f1,f2.........,fn]
- Analogique : fonction du temps f(t)=...

Exemple de différence analogique / numérique

## Energie d'un signal

- Quantité de travail nécessaire pour créer le signal.

Analogique : $$\left|f\right|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left|f(t)\right|^2 dt$$

Numérique : $$\left|f\right|^2 = \sum_{i=1}^{N} \left|f_i\right|^2$$

# Traitement du signal

## Représentation d'un signal numérique

- vecteur f=[f1,f2.........,fn]
- Dans une base : $f = \sum_{i=1}^{N} f_i \vec{e}_i$

Les fi représentent la «  quantité «  de signal présente à l'instant i.

# Traitement du signal

## Représentation d'un signal analogique

- Présenter le Dirac....

# Traitement du signal

## Introduction à la notion de fréquences

- Ce qu'on sait sur les fréquences :
  - en Hz (1/s)
  - Hautes / Basses fréquences.
  - On peut les filtrer (équaliseur).

Personne (de normal) ne sait définir une fréquence...

# Traitement du signal

## Espace de Fourier

Sans détailler l'aspect mathématique, on peut écrire :

$$\exists F(\nu) / \forall t,\ f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu$$

Interprétation:

=> Les exponentielles complexes sont une base des signaux.

=> Chaque signal peut être vu comme une somme de sinusoides de fréquences différentes.

=> F($\nu$) représente la quantité de chaque fréquence présente dans le signal. On l'appelle transformée de Fourier de f, notée TF(f).

# Traitement du signal

## Espace de Fourier

Pour obtenir la TF d'un signal f :

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i2\pi\nu t}\, dt$$

Remarques :

- F($\nu$) est la représentation de f dans l'espace de Fourier : même info.
- F($\nu$) ne dépend pas du temps.
- F($\nu$) est aussi un signal.
- F($\nu$) est à valeurs dans C...

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu)\, e^{i2\pi\nu t}\, d\nu$$

# Traitement du signal

## Espace de Fourier

On peut écrire :

$$F(\nu)=|F(\nu)|.e^{i\theta(\nu)}$$

Remarques : Identique recette de cuisine

- Module (Spectre de la TF) : quantité de la sinusoïde de fréquence nu.
- Phase : a quel moment incorporer cette sinusoïde.
- Avec les deux, on re-crée f(t).
- Phase difficile à interpréter.
- Importance relative dépend du signal.

# Traitement du signal

## Parseval

On a : $$|F|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\nu)|^2 \, d\nu = |f|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt$$

F et f représentent le même signal : Leur énergie est égale.

# Traitement du signal

## Espace de Fourier

TF d'un signal 2d (image analogique) :

$$F(\mu,\nu)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)e^{-i2\pi\mu x}e^{-i2\pi\nu y}\,dx\,dy$$

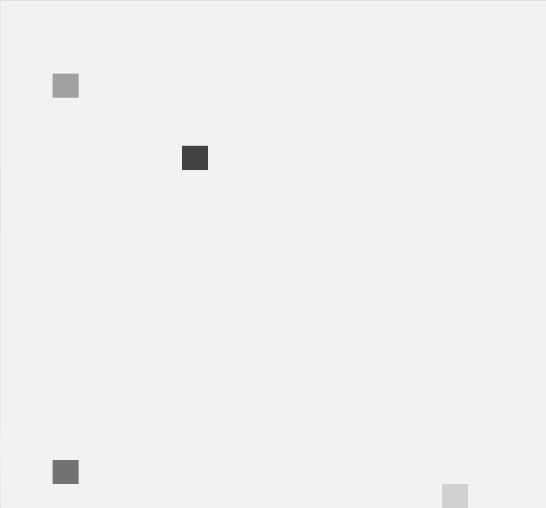
TF inverse d'un signal 2d

$$f(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(\mu,\nu)e^{i2\pi\mu x}e^{i2\pi\nu y}\,d\mu\,d\nu$$

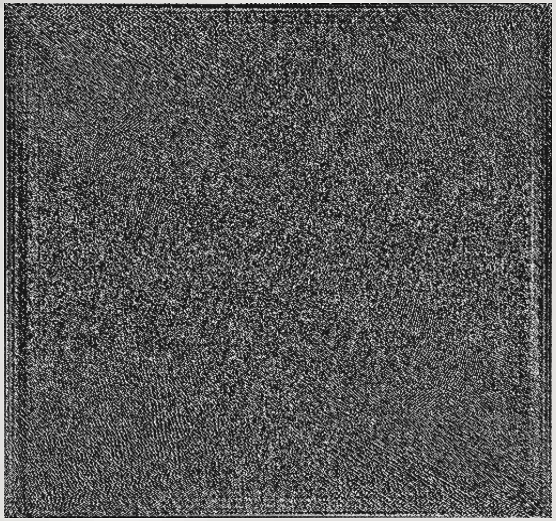
# Exemple de TF

Image de départ → Plan de Fourier

Module

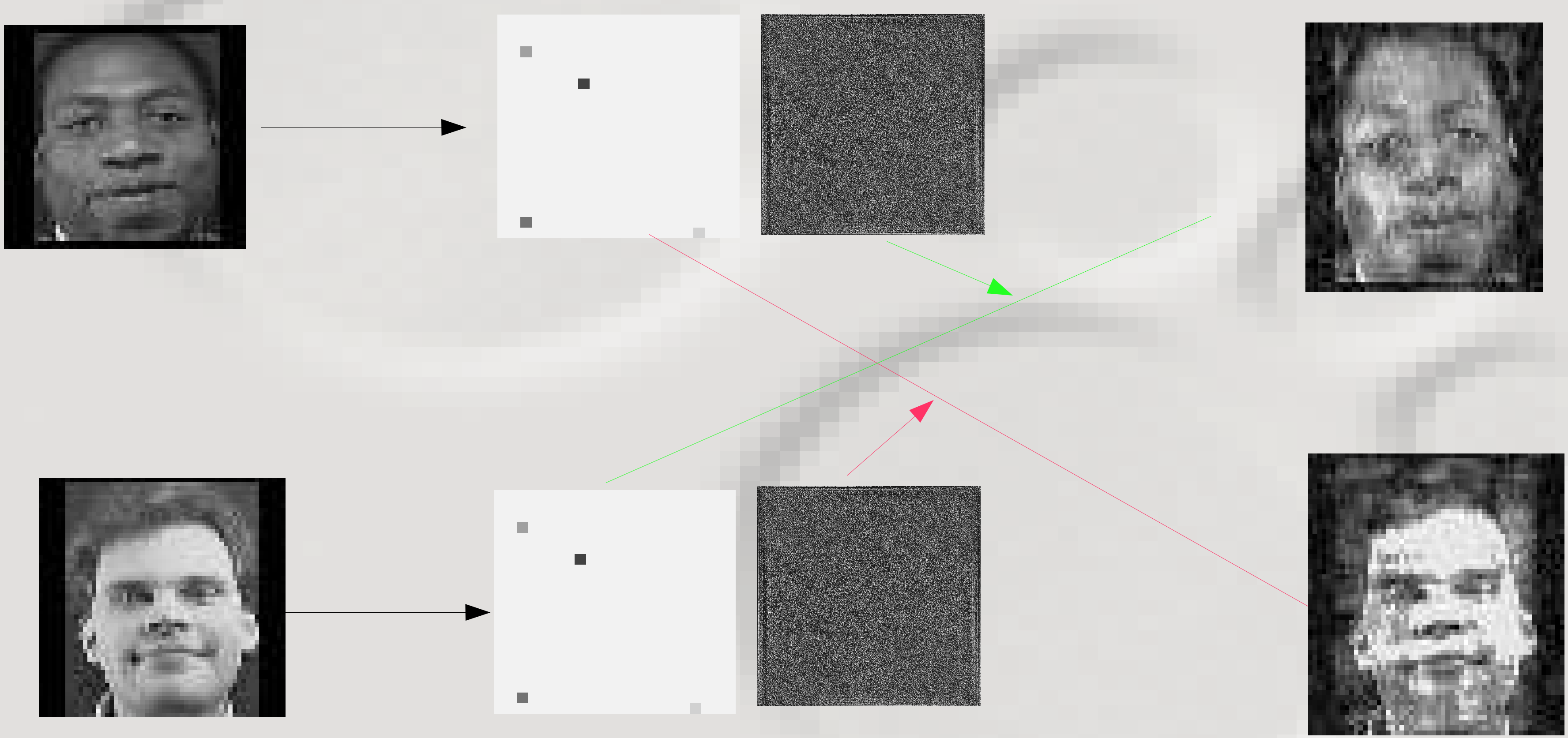


Phase



# Importances respectives du module et de la phase de la TF

Attention, Ceci ne vaut que pour des images !



## Quelques TF célèbres

### Exercices et propriétés

Trouver la TF de :

- $f(t) = 1 \; si\, t \in \left[-1/2\,,\,1/2\,\right]$
  $f(t) = 0 \; sinon$

- $f(t) = \delta(t)$

- $f(t - t0)$

- $f(at)$

- $e^{i2\pi\nu_0 t} f(t)$

# Traitement du signal

## Propriétés de la TF

Symétrie des signaux reels.

Retournement temporel

Involution.

....

## Filtrage linéaire : principe

Opération de filtrage de fréquence :

- Multiplication point à point dans l'espace de Fourier.
- Convolution dans le temps. Ki bitin ?

# Traitement du signal

## Convolutions célèbres

- Convolution par un dirac.
- Auto convolution d'une porte
- Auto corrélation.

# Traitement du signal

## Exemple de filtrage passe haut

TF * = TFI

# Traitement du signal

## Exemple de filtrage passe bas

TF *  = TFI

# Traitement du signal

## TF des signaux numériques

TF et TF inverse :

$$F_m = \sum_{n=0}^{N-1} f_n \exp^{-i2\pi nm/N} \qquad f_n = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} F_m \exp^{i2\pi nm/N}$$

Parseval : $$\sum_{n=0}^{N-1} |f_n|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |F_m|^2$$

# Traitement du signal

## Filtrage des signaux numériques

Convolution :
$$s_n = h * e = \sum_{k=0}^{N-1} h_k e_{n-k}$$

Convolution et TFD :
$$s = h * e \rightarrow S_k = H_k . E_k$$

## Déconvolution : Principe

Un signal a subi un filtrage accidentel avant d'être observé.

On désire retrouver le signal original.

$$\text{S et h} \xrightarrow{s=h*o} S(\nu)=H(\nu).O(\nu)$$

$$\text{o} \longleftarrow O(\nu)=S(\nu)/H(\nu)$$

# Traitement du signal

## Exemple de déconvolution

Le flou de bougé

# Traitement du signal

## Exemple de déconvolution

Le flou de défocalisation

# Traitement du signal

## Echantillonage

Shannon

# Traitement du signal

## Compression avec pertes à l'aide de la TF

On ne conserve que certaines fréquences.

# Traitement du signal et Théorie de l'information

Codage jpeg.

1. Compression avec pertes :
   - Transformee en cosinus (semblable TF).
2. Réorganisation des informations
3. Codage entropique.