

Pluviométrie en Milieu Tropical Insulaire Une approche Multifractale?

Didier BERNARD¹, Raphaël PASQUIER²

¹Laboratoire de Recherche en Géosciences et Énergies (LaRGE) EA4098

²Centre Commun de Calcul Intensif (C3I)

Université des Antilles et de la Guyane, Pointe-à-Pitre, Guadeloupe.

26 Avril 2012

Introduction

Quels sont les problèmes ?

- Pluviométrie : signal temporel, intermittent, hétérogène, avec un grand nombre d'échelles
→ Modélisation des processus pluvieux à petite échelle difficile.
- En milieu tropical : Les modèles de distribution sont-ils adaptés à la représentation de ce phénomène naturel ?

Quels sont les objectifs ?

- Analyser et caractériser les champs pluvieux observés à une station convective de basse altitude en milieu tropical.

Introduction suite

Des applications ?

- Modélisation : modèles stochastiques → Pluie Numérique ?
- Monde Agricole : Appauvrissement agricole et arboricole : Surchaulage...
- Bâtiments et Travaux publics : Dimensionnement des sections hydrauliques, Routes nouvelles...
- Risques humains : Inondations.

Plan

1 Pourquoi ?

- la loi normale mise en échec
- D'autres lois ?

2 Que proposes-t-on ?

- Les Lois puissances et propriétés multifractales
- Comment décrire un champ irrégulier au moyen de $K(q)$?

Quelles sont les failles dans la pratique actuelle ?

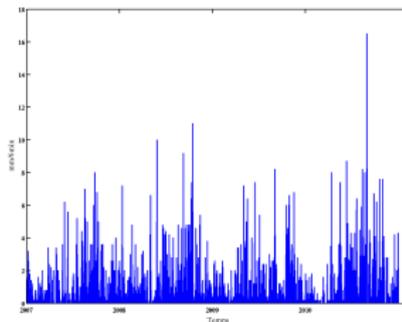


FIGURE 1: Serie temporelle des cumuls 6 min observés de 2007-2010 au Raizet

Année	Minimum	maximum	Moyenne	Ecart-type	Nombre	Manquant	N > 0.2 mm
2007	0	8	0.0120	0.1425	87551	49	1823
2008	0	11	0.0181	0.1895	87580	250	2430
2009	0	8.2	0.0147	0.1655	87600	0	2098
2010	0	16.5	0.01987	0.2164	87600	1	2336
récapitulatif							
2007-10	0	16.5	0.0162	0.1806	350330	310	8687

TABLE 1: Paramètres statistiques simples des séries de cumuls pluviométriques 6 min enregistrés à la station du raizet de 2007 à 2010

Loi normale ou de Gauss-Laplace :

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \rightarrow f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

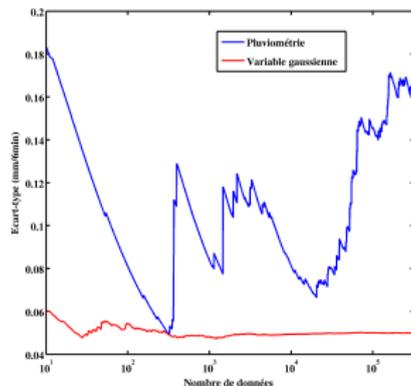


FIGURE 2: Ecart-type de la série temporelle, Pluviométrie 6 min, Raizet, 2007-2010.

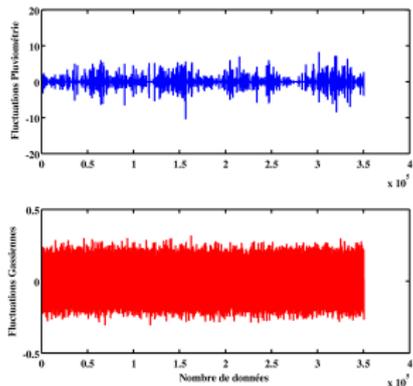


FIGURE 3: Ordre de grandeur des fluctuations dans le cas Gaussien (Courbe Rouge) ; cas de la variable météorologique pluviométrique (courbe bleue).

Constats

- Pluviométrie : Ecart-type non fini (courbe bleue), convergence de l'écart-type Gaussien (loi des grands nombres)
- Forte variabilité des fluctuations de la variable météorologique,
- Convergence des fluctuations de la variable gaussienne $\simeq 4\sigma$

Plan

1 Pourquoi ?

- la loi normale mise en échec
- D'autres lois ?

2 Que proposes-t-on ?

- Les Lois puissances et propriétés multifractales
- Comment décrire un champ irrégulier au moyen de $K(q)$?

Les lois GEV : les maximum comptent plus que la moyenne !

$$F(x; \mu, \sigma, \xi) = \exp\left\{-\left[1 + \xi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)\right]^{\frac{-1}{\xi}}\right\}$$

- le cas $\xi < 0$, appelée distribution de weibull, cas où les variables X_i sont bornées (module du vent) ;
- le cas $\xi = 0$ appelé distribution de Gumbel, cas du hasard sage, est au maximum d'un échantillon ce que la loi normale est à la moyenne ;
- si les variables X_i suivent une loi de Pareto d'exposant α , alors $\xi = 1/\alpha > 0$, distribution de Fréchet.

Plan

1 Pourquoi ?

- la loi normale mise en échec
- D'autres lois ?

2 Que proposes-t-on ?

- Les Lois puissances et propriétés multifractales
- Comment décrire un champ irrégulier au moyen de $K(q)$?

Quels sont les nouveautés par rapport à cette faille ?

Quelle fonction mathématique faut-il utiliser ? : Loi puissance

$$Y = cteX^k \longrightarrow \log Y = k \log(X) + \log(Cte)$$

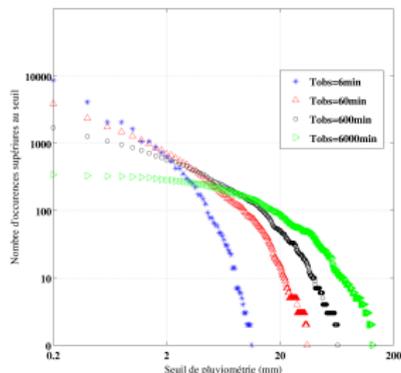


FIGURE 4: Loi puissance dans un graphique logarithmique : Pluviométrie Raizet, 2007-2010.

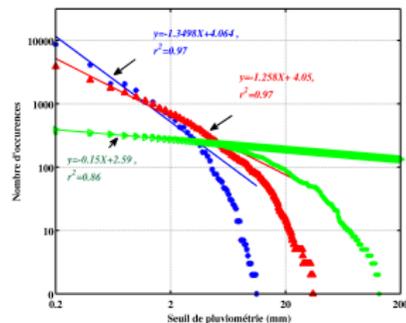


FIGURE 5: Régression linéaire et expression analytique des lois puissances.

Comment passer aux probabilités ?

- T : l'échelle totale d'observation (4 ans en minute)
- Δt_i : durée d'une observation (6 minutes pour la plus petite)
- $\lambda_i = \frac{T}{\Delta t_i}$: échelle d'observation
- γ : singularité, transformation logarithmique en base λ des observations mesurées à cette échelle avec

$$\gamma = \log_{\lambda}(Cu_{\lambda})$$

- Cu_{λ} est le cumul observé à l'échelle λ

- Estimateur de la probabilité d'un évènement :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_{ev}}{N} = P(X > x) \longrightarrow P(X > x) = 1 - F(x) \propto \lambda^{-C(\gamma)}$$

(N : Nombre total évènements, N_{ev} : Nombre d'évènements $>$ seuil)

- Calculer les moments empiriques de la distribution :

$$E[Cu_{\lambda}^q] = \int_0^{\infty} x^q \frac{dP(Cu_{\lambda} > \lambda^{\gamma})}{dx} dx$$

$$E[Cu_{\lambda}^q] \propto \lambda^{q\gamma - C(\gamma)} \propto \lambda^{K(q)}$$

avec

$$- K(q) = \max_{\gamma} [q\gamma - C(\gamma)] \text{ et } x = \lambda^{\gamma}$$

Exemple numérique

Exemple : durée totale = 4 ans, durée d'observation = 6 min , seuil de 0,2 mm.

- $\lambda_{6min} = \frac{T}{\Delta t_i} = \frac{(3 \times 365 \times 24 \times 60) + (366 \times 24 \times 60)}{6} = 350640$
- $P((Cu_{\lambda_{6min}}) > 0.2mm) = \frac{8687}{350640} = \frac{350640^{0.710}}{350640} = 350640^{-(1-0.710)}$
- $P((Cu_{\lambda_{6min}}) > 0.2mm) = \lambda^{-(D-DA)} \mapsto C(-0.12) = 0.29$
avec $\log_{\lambda}(0.2) = -0.12$.
- $P((Cu_{\lambda_{6min}}) > \text{seuilgrand}) \rightarrow 350640^{-1} \rightarrow c(\gamma) \rightarrow 1$

Rappel : s'intéresser à la loi de probabilité des singularités γ à travers le concept de la fonction codimension $C(\gamma)$ et/ou de la fonction d'échelle $K(q)$.

Plan

1 Pourquoi ?

- la loi normale mise en échec
- D'autres lois ?

2 Que proposes-t-on ?

- Les Lois puissances et propriétés multifractales
- Comment décrire un champ irrégulier au moyen de $K(q)$?

- 1 : X2 fonctions, $C(\gamma)$ et $K(q)$, susceptibles de résumer les propriétés multifractales du signal pluviométrie à petite échelle ;
- 2 : Existence de modèles analytiques donnant l'expression analytique de $K(q)$;
- 3 vérifier si une relation du type précédent peut être ajustée aux moments empiriques des séries de données.

Cas du modèle universel

Expression du modèle analytique de la fonction $K(q)$:

$$K(q) = \frac{C_1}{\alpha - 1} (q^\alpha - q), \text{ pour } \alpha \neq 1$$

- α : degré de multifractalité ($0 < \alpha < 2$), rapidité de la variation de la codimension en fonction de la singularité ;
- C_1 : codimension de la singularité de la moyenne, mesure de l'hétérogénéité du signal .

Invariance d'échelle des moments empiriques

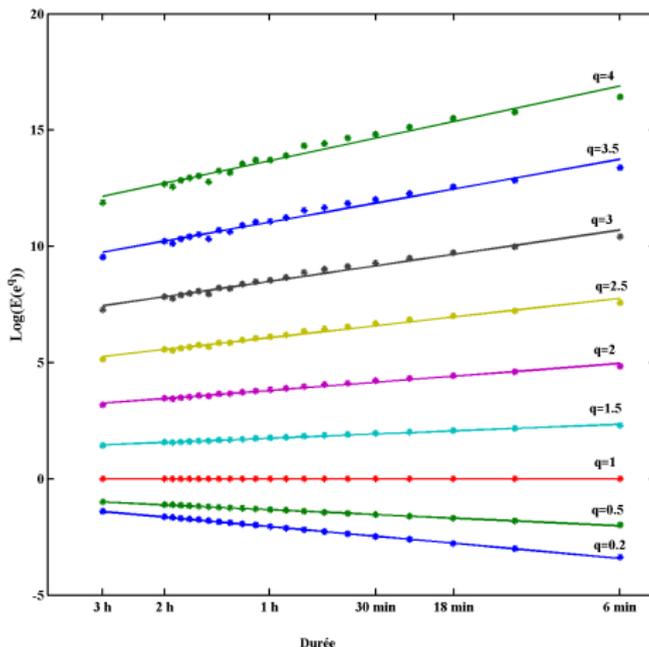


FIGURE 6: Évolution en coordonnées log-log des moments empiriques d'ordre q en fonction du pas de temps.

Titre

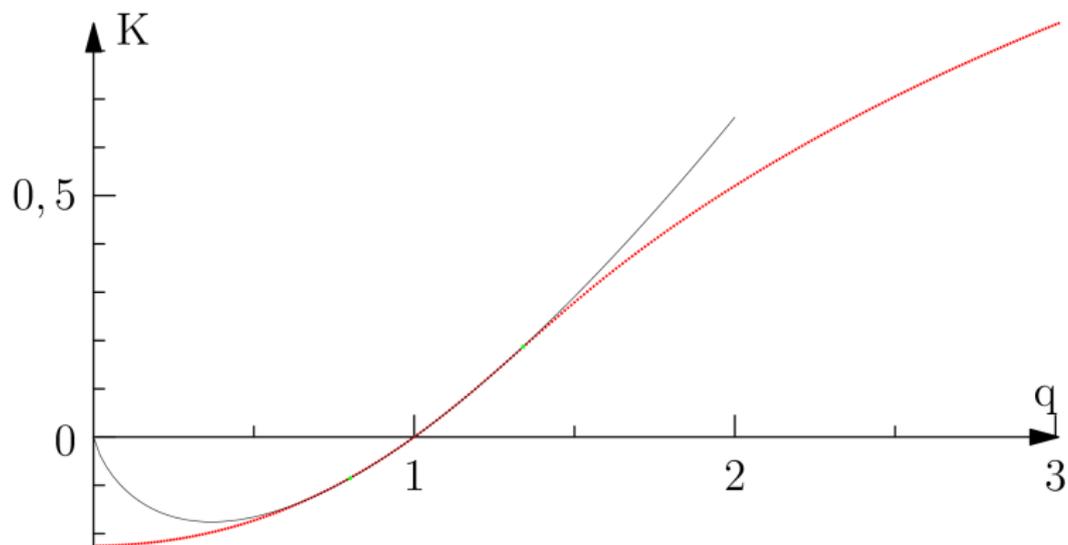


FIGURE 7: Évolution en coordonnées log-log des moments empiriques d'ordre q en fonction du pas de temps.

Conclusions et perspectives

Conclusions

- 1 Analyse du champ pluvieux aux petites échelles
↳ : Signal complexe mais présence d'une Invariance d'échelle.
- 2 Forme analytique de $K(q)$ différente du modèle universel.
- 3 Modèle(s) stochastique pour pluies convectives Insulaires

Perspectives : Stations orographiques, prise en compte des zéros,